

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(\mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) \leq 4 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$\Pr(\mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) \leq 4 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$$

Demostración. Si $\mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$, entonces la menos una de las siguientes condiciones debe ser cierta:

(a) $|\{i \in \{1, \dots, \mathbf{Length}(S)\} \mid S[i] > m\}| \geq 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

(b) $|\{i \in \{1, \dots, \mathbf{Length}(S)\} \mid S[i] < m\}| \geq 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Vamos a demostrar que la probabilidad de que (a) ocurra es menor o igual a $2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Vamos a demostrar que la probabilidad de que (a) ocurra es menor o igual a $2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$

De la misma forma se demuestra que la probabilidad que (b) ocurra es menor o igual a $2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$

► De esto se concluye que $\Pr(\mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) \leq 4 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Suponga que (a) es cierto, y sea ℓ la posición de u en la lista L ordenada.

- Tenemos que $\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Suponga que (a) es cierto, y sea ℓ la posición de u en la lista L ordenada.

► Tenemos que $\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Dado que $u = R[\lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil]$, al menos $\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil$ elementos de R deben estar en posiciones mayores o iguales a ℓ en la lista L ordenada.

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Suponga que (a) es cierto, y sea ℓ la posición de u en la lista L ordenada.

- ▶ Tenemos que $\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Dado que $u = R[\lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil]$, al menos $\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil$ elementos de R deben estar en posiciones mayores o iguales a ℓ en la lista L ordenada.

- ▶ No podemos asegurar que estos elementos están en posiciones mayores a ℓ puesto que R puede tener elementos repetidos

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Suponga que (a) es cierto, y sea ℓ la posición de u en la lista L ordenada.

- ▶ Tenemos que $\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Dado que $u = R[\lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil]$, al menos $\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil$ elementos de R deben estar en posiciones mayores o iguales a ℓ en la lista L ordenada.

- ▶ No podemos asegurar que estos elementos están en posiciones mayores a ℓ puesto que R puede tener elementos repetidos
- ▶ Vamos a acotar superiormente la probabilidad de que esto ocurra para obtener un cota superior para la probabilidad de que (a) ocurra

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Para cada $i \in \{1, \dots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria W_i de la siguiente forma:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{si la posición de } R[i] \text{ en la lista } L \text{ ordenada} \\ & \text{es mayor o igual a } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Para cada $i \in \{1, \dots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria W_i de la siguiente forma:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{si la posición de } R[i] \text{ en la lista } L \text{ ordenada} \\ & \text{es mayor o igual a } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, definimos la variable aleatoria W como $\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} W_i$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Para cada $i \in \{1, \dots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria W_i de la siguiente forma:

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{si la posición de } R[i] \text{ en la lista } L \text{ ordenada} \\ & \text{es mayor o igual a } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, definimos la variable aleatoria W como $\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} W_i$

Dado que $\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$, tenemos entonces que la probabilidad de que (a) ocurra es menor o igual a:

$$\Pr(W \geq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil)$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Como L no contiene elementos repetidos obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pr(W_i = 1) &= \frac{n - (\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) + 1}{n} \\ &= \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor + 1}{n} \\ &= \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Como L no contiene elementos repetidos obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pr(W_i = 1) &= \frac{n - (\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) + 1}{n} \\ &= \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor + 1}{n} \\ &= \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}E(W_i) &= \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \\ \text{Var}(W_i) &= \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\right)\end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} E(W) &= E\left(\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} W_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} E(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \\ &= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Pero tenemos que:

$$\begin{aligned} \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} &\leq (n^{\frac{3}{4}} + 1) \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} + \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} + 3 \cdot n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - 2 \cdot n^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1 \end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Pero tenemos que:

$$\begin{aligned} \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} &\leq (n^{\frac{3}{4}} + 1) \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} + \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}} + 3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} + 3 \cdot n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - 2 \cdot n^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{n} \\ &= n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{n} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1 \end{aligned}$$

Concluimos que $E(W) \leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Para $i, j \in \{1, \dots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que W_i es independiente de W_j

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Para $i, j \in \{1, \dots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que W_i es independiente de W_j

Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned}\text{Var}(W) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} W_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \text{Var}(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\right) \\ &= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\right)\end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n}\right) &= \frac{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor}{n} \\ &\leq \frac{n - \frac{n}{2} + 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} \\ &= \frac{\frac{n}{2} + 2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cdot n^{-\frac{1}{4}} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\lceil n^{\frac{3}{4}} \right\rceil \cdot \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 \cdot \left\lfloor n^{\frac{3}{4}} \right\rfloor}{n} &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + 1 \\ &\leq n^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\lceil n^{\frac{3}{4}} \right\rceil \cdot \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 \cdot \left\lfloor n^{\frac{3}{4}} \right\rfloor}{n} &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + 1 \\ &\leq n^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Concluimos que $\text{Var}(W) \leq n^{\frac{3}{4}}$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned}\Pr(W \geq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq \Pr(W \geq n^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} - 1) \\ &= \Pr(W \geq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} - 1) \\ &= \Pr(W \geq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot n^{\frac{1}{2}} + 1 + n^{\frac{1}{2}} - 2) \\ &\leq \Pr(W \geq E(W) + n^{\frac{1}{2}} - 2) \\ &\leq \Pr(W \geq E(W) + n^{\frac{1}{2}} - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot n^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \Pr(W \geq E(W) + \sqrt{\frac{n}{2}}) \\ &= \Pr(W - E(W) \geq \sqrt{\frac{n}{2}}) \\ &\leq \Pr(|W - E(W)| \geq \sqrt{\frac{n}{2}})\end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Chebyshev concluimos que:

$$\begin{aligned}\Pr(W \geq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq \Pr(|W - E(W)| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}) \\ &\leq \frac{\text{Var}(W)}{\frac{n}{2}} \\ &\leq \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\frac{n}{2}} \\ &= 2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Un último uso de la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Chebyshev concluimos que:

$$\begin{aligned}\Pr(W \geq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq \Pr(|W - E(W)| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}) \\ &\leq \frac{\text{Var}(W)}{\frac{n}{2}} \\ &\leq \frac{n^{\frac{3}{4}}}{\frac{n}{2}} \\ &= 2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Concluimos que la probabilidad de que (a) ocurra es menor o igual a $2 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$. □

El cálculo final

Recuerde que estamos considerando una lista $L[1 \dots n]$ de números enteros donde n es impar y mayor o igual a 2001.

El cálculo final

Recuerde que estamos considerando una lista $L[1 \dots n]$ de números enteros donde n es impar y mayor o igual a 2001.

Para la lista L demostramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) &\leq n^{-\frac{1}{4}} \\ \Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq n^{-\frac{1}{4}} \\ \Pr(\mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor) &\leq 4 \cdot n^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

El cálculo final

Tenemos entonces que:

$$\Pr(\text{CalcularMediana}(L) \text{ retorne } \textit{sin_resultado}) \leq 6 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$$

El cálculo final

Tenemos entonces que:

$$\Pr(\text{CalcularMediana}(L) \text{ retorne } \textit{sin_resultado}) \leq 6 \cdot n^{-\frac{1}{4}}$$

Dado que $n \geq 2001$ concluimos que

$$\begin{aligned} \Pr(\text{CalcularMediana}(L) \text{ retorne } \textit{sin_resultado}) &\leq 6 \cdot 2001^{-\frac{1}{4}} \\ &< \frac{9}{10} \end{aligned}$$

El tiempo esperado del algoritmo

Sea p la probabilidad de que **CalcularMediana**(L) retorne resultado

- ▶ Tenemos que $p \geq \frac{1}{10}$

¿En promedio cuántas veces se debe llamar a **CalcularMediana**(L) para obtener la mediana de la lista L ?

El tiempo esperado del algoritmo

Sea T una variable aleatoria tal que para cada $i \geq 1$:

$$\Pr(T = i) = (1 - p)^{i-1} \cdot p$$

Vale decir, T representa el número de llamadas a **CalcularMediana**(L) hasta obtener un resultado

El tiempo esperado del algoritmo

Sea T una variable aleatoria tal que para cada $i \geq 1$:

$$\Pr(T = i) = (1 - p)^{i-1} \cdot p$$

Vale decir, T representa el número de llamadas a **CalcularMediana**(L) hasta obtener un resultado

Dado que T tiene distribución geométrica de parámetro p , concluimos que

$$E(T) = \frac{1}{p} \leq 10$$

El tiempo esperado del algoritmo

Sea T una variable aleatoria tal que para cada $i \geq 1$:

$$\Pr(T = i) = (1 - p)^{i-1} \cdot p$$

Vale decir, T representa el número de llamadas a **CalcularMediana**(L) hasta obtener un resultado

Dado que T tiene distribución geométrica de parámetro p , concluimos que

$$E(T) = \frac{1}{p} \leq 10$$

Concluimos que en promedio se debe llamar 10 veces a **CalcularMediana**(L) para obtener la mediana de la lista L